Produkt dva pozitivna cijela broja

Antun Rubčić i Jasna Baturić-Rubčić, Zagreb*

Prisjetimo se, ponajprije, jednog lijepog događaja iz djetinjstva K. F. Gaussa. Na jednom satu matematike učitelj je hitno nešto morao obaviti za školu, pa je učenicima, da ih zaposli, dao zadatak da zbroje sve brojeve od 1 do 100. Nakon kratkog vremena dječačić Gauss donese napisan samo jedan jedini broj 5050. Iznenađeni učitelj odmah je shvatio da pred sobom ima budućeg velikog matematičara. I nije se prevario. Kako je Gauss došao do ispravnog rezultata? Primijetio je da prvi i zadnji broj daju zbroj $1 + 100 = 101$. Nadalje, drugi i predzadnji broj daju $2 + 99 = 101$, itd. Broj takvih parova je 50, dakle $50 \cdot 101 = 5050$. Na temelju ovakvog jednostavnog razmišljanja može se odrediti, na primjer, i zbroj brojeva od 1 do 100, ako oni imaju promjenjive predznake prema pravilu $1, -2, 3, -4, 5, -64 \ldots 97, -98, 99, -100$. I tu se bez posebnog računanja lako može zaključiti da je zbroj jednak -50. Uvjerite se u točnost ove tvrdnje!

U igri s brojevima, možemo krenuti i obrnutim putem i upitati se koliko ima mogućnosti da zbroj dva cijela broja istog predznaka bude 101? Prema gornjem primjeru ima pedeset mogućnosti. Za po volji odabrane brojeve, na primjer $7 + 12 = 19$, očito postoji još nekoliko mogućnosti kao $8+11 = 19$ i $9 + 10 = 19$. Nazovimo ove mogućnosti ili kombinacije "unutarnjim", jer su komponente brojevi između 7 i 12. No postoje i "vanjske" kombinacije: $6 + 13$, $5 + 14$, itd. sve do $1 + 18 = 19$, dakle ukupno samo 9 mogućnosti.

Postavimo sada sljedeće pitanje: može li se produkt dva pozitivna cijela broja napisati i nekako drukčije? Postoji li i ovdje više kombinacija, "unutarnjih" i "vanjskih", kao što je pokazano kod zbrajanja? Doista, to je moguće, i odgovor na to pitanje ćemo doskora dati.

* Autori su profesori na Fizičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu,
e-mail: rubcic@sirius.phy.hr

Produkt P dva cijela pozitivna broja definiran je s

$$P = n \cdot k. \tag{1}$$

Neka je $k > n$ i $k = n + m$, gdje je m također cijeli broj, pa se relacija (1) može napisati i kao

$$P = n(n + m). \tag{2}$$

Produkt (2) može se napisati i pomoću cijelih brojeva, koji se nalaze između n i k. Na primjer

$$P = (n + 1)(n + m - 1) - (m - 1), \tag{3}$$

jer je

$$(n + 1)(n + m - 1) - (m - 1) = n^2 + nm - n + n + m - 1 - m + 1 = n^2 + nm.$$

Lako se uvjeriti da postoji još niz kombinacija sličnih onoj u (3). Ispišimo ih redom:

$$\begin{aligned} P &= n(n + m) - 0 \\ &= (n + 1)(n + m - 1) - (m - 1) \\ &= (n + 2)(n + m - 2) - 2(m - 2) \\ &\ \vdots \\ &= (n + m - 1)(n + 1) - (m - 1) \\ &= (n + m)n - 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Sistem jednadžbi (4) može se ispisati redom za $m = 0$, $m = 1$, $m = 2$, itd.:

$$\begin{array}{llll} m = 0 & P = n(n + 0) & -0 \Longrightarrow 0 & (5) \\ m = 1 & P = n(n + 1) & -0 & \\ & = (n + 1)n & -0 \Longrightarrow 0 \quad 0 & (6) \\ m = 2 & P = n(n + 2) & -0 & \\ & = (n + 1)(n + 1) & -1 & \\ & = (n + 2)n & -0 \Longrightarrow 0 \quad 1 \quad 0 & (7) \\ m = 3 & P = n(n + 3) & -0 & \\ & = (n + 1)(n + 2) & -2 & \\ & = (n + 2)(n + 1) & -2 & \\ & = (n + 3)n & -0 \Longrightarrow 0 \quad 2 \quad 2 \quad 0 & (8) \\ m = 4 & P = n(n + 4) & -0 & \\ & = (n + 1)(n + 3) & -3 & \\ & = (n + 2)(n + 2) & -4 & \\ & = (n + 3)(n + 1) & -3 & \\ & = (n + 4)n & -0 \Longrightarrow 0 \quad 3 \quad 4 \quad 3 \quad 0 & (9) \\ m = 5 & P = n(n + 5) & -0 & \\ & = (n + 1)(n + 4) & -4 & \\ & = (n + 2)(n + 3) & -6 & \\ & = (n + 3)(n + 2) & -6 & \\ & = (n + 4)(n + 1) & -4 & \\ & = (n + 5)n & -0 \Longrightarrow 0 \quad 4 \quad 6 \quad 6 \quad 4 \quad 0 & (10) \end{array}$$

Svakoj vrijednosti broja m pripada određen niz brojeva. Koristeći nizove naznačene uz (5)–(10), može se izravno zaključiti i na nizove brojeva za $m > 5$ (provjerite da za $m = 6$ slijedi niz 0 5 8 9 8 5 0). Nizovi brojeva se očito mogu svrstati u trokutnu shemu (sličnu Pascalovom trokutu binomnih koeficijenata), pa se dobije:

	... −10	−9	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 ...
$m=0$											0										
$m=1$										0		0									
$m=2$									0		1		0								
$m=3$								0		2		2		0							
$m=4$							0		3		4		3		0						
$m=5$						0		4		6		6		4		0					
$m=6$					0		5		8		9		8		5		0				
$m=7$				0		6		10		12		12		10		6		0			
$m=8$			0		7		12		15		16		15		12		7		0		
$m=9$		0		8		14		18		20		20		18		14		8		0	
$m=10$	0		9		16		21		24		25		24		21		16		9		0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

(11)

(prvi gornji red označuje broj stupca)

Ispitajmo svojstva ovog trokuta:

a) prvi kosi red su nule

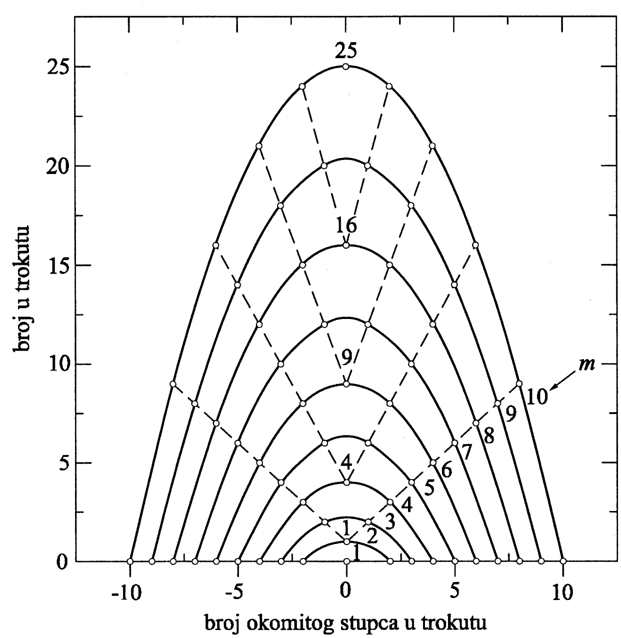
b) drugi kosi red su cijeli brojevi s razmakom $\Delta = 1$,

c) treći kosi red su cijeli brojevi s razmakom $\Delta = 2$,

d) četvrti kosi red su cijeli brojevi s razmakom $\Delta = 3$, itd.,

e) centralni stupac (podebljanih) brojeva je niz kvadrata $(1^2, 2^2, 3^2 \ldots .)$.

d) grafički prikaz trokuta dan je na slici.



Krivulje na slici su porodica parabola $y = a - bx^2$, gdje su y-i brojevi u m-tom retku, a x-evi brojevi stupaca (jednaki broju $\pm m$). Konstanta b jednaka je za sve parabole, tj. $b = \frac{1}{4}$. Vrijednosti konstanata a su za parne brojeve m jednake 1, 4, 9, 16, 25, ... a za neparne m su 2.25, 6.25, 12.25, 22.25, ...

Zapitajmo se sada može li se produkt dvaju brojeva prikazati pomoću kvadrata jednog ili više brojeva? To pitanje je sugerirano centralnim stupcem u trokutu. Razmotrimo na primjer produkt $3 \cdot 7 = 21$. Napišimo niz brojeva redom i to od 3 do 7 kako slijedi $\{3, 4, 5, 6, 7\}$. Odmah se uočava da je središnji broj 5 i da se nalazi na drugom mjestu iza početnog broja 3, te se može zapisati $3 \cdot 7 = 5^2 - 2^2 = 21$. Još jedan primjer je $4 \cdot 10 = 40$. Niz brojeva od 4 do 10 je $\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, pa je centralni broj 7, a nalazi se na trećem mjestu iza broja 4. Dakle, može se napisati $7^2 - 3^2 = 49 - 9 = 40$. Pokažimo da to općenito vrijedi ako je m parni broj, kao što je to vidljivo u gornjim primjerima. U produktu $P = n(n+m)$, centralni broj niza je $n + \frac{m}{2}$, pa je pridružena razlika kvadrata općenito:

$$\left(n + \frac{m}{2}\right)^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2 = n^2 + nm + \left(\frac{m}{2}\right)^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2 = n(n+m).$$

Pogledajmo nadalje što se može zaključiti o drugim znamenkama u nizu brojeva u zadnjem primjeru $4 \cdot 10$. Dva susjedna broja na lijevo i na desno od broja 7 su 6 i 8. Broj 6 se nalazi na drugom mjestu, a 8 na četvrtom. Vidi se da je $(6^2 - 2^2 + 8^2 - 4^2)/2 = 40$. Općenito dakle vrijedi

$$\frac{1}{2}\left[\left(n + \frac{m}{2} - 1\right)^2 - \left(\frac{m}{2} - 1\right)^2 + \left(n + \frac{m}{2} + 1\right)^2 - \left(\frac{m}{2} + 1\right)^2\right] = n(n+m) \tag{12}$$

Slično je i s brojevima 5 i 9: $(5^2 - 1^2 + 9^2 - 5^2)/2 = 40$. Broj 5 se nalazi na prvom mjestu iza 4, a 9 na 5 mjestu. Poopćenje je slično kao u jednadžbi (12). Ostaje pitanje da li to vrijedi i za krajnje brojeve 4 i 10? Doista vrijedi, jer se 4 nalazi na 0-tom mjestu, a 10 na 6-om mjestu, pa je $(4^2 - 0^2 + 10^2 - 6^2)/2 = 40$. Općenito dakle, za parni m, vrijedi

$$\frac{1}{2}\left[\left(n + \frac{m}{2} - k\right)^2 - \left(\frac{m}{2} - k\right)^2 + \left(n + \frac{m}{2} + k\right)^2 - \left(\frac{m}{2} + k\right)^2\right] = n(n+m) \tag{13}$$

za $k = 0, 1, 2, \ldots, \frac{m}{2}$. (Provjerite ovu tvrdnju!).

Za neparni m vrijedi ista relacija, samo je sada $k = 0, 1, 2, \ldots, \frac{m-1}{2}$. Uočimo još jedno svojstvo trokuta brojeva (11); izračunajmo sumu brojeva S_m za svaki red. Rezultat tog postupka dan je u u sljedećoj tabeli:

$$\begin{array}{ll}
m & S_m \\
0 & 0 \\
1 & 0 = 0^2 \\
2 & 1 = 1^2 \\
3 & 4 = 2^2 + 0^2 \\
4 & 10 = 3^2 + 1^2 + 0^2 \\
5 & 20 = 4^2 + 2^2 + 0^2 \\
6 & 35 = 5^2 + 3^2 + 1^2 + 0^2 \\
7 & 56 = 6^2 + 4^2 + 2^2 + 0^2 \\
8 & 84 = 7^2 + 5^2 + 3^2 + 1^2 + 0^2 \\
9 & 120 = 8^2 + 6^2 + 4^2 + 2^2 + 0^2 \\
10 & 165 = 9^2 + 7^2 + 5^2 + 3^2 + 1^2 + 0^2 \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array} \tag{14}$$

Ako je m neparni broj tada je S_m rezultat zbrajanja parnih kvadrata, a prvi broj je $(m-1)^2$. Zanimljivo je uočiti da je prvi stupac (iza znaka jednakosti) niz kvadrata cijelih brojeva. Drugi stupac je također isti niz kvadrata, ali pomaknut na niže, tako da je njegov prvi član u istom redu s trećim članom prvog niza. Slično je i za sljedeće stupce. Za neparni broj m je, dakle,

$$S_m = \sum_{j=1}^{(m-1)/2} (2j)^2 \quad \text{a za parni} \quad m \qquad S_m = \sum_{j=1}^{m/2} (2j-1)^2.$$

Pokažimo nadalje da vrijedi

$$P = \frac{1}{m+1}\Big(\sum_{j=0}^{m}(n_j^2 - j^2)\Big) \tag{15}$$

gdje je za $j=0$, $n_0 = n$. Ilustrirajmo to na primjeru: $P = 11 \cdot 16 = 176$ s pripadnim nizom (**11**,12,13,14,15,**16**) za $m=5$.

Prema (15) slijedi

$$P = \frac{1}{6}(11^2 - 0^2 + 12^2 - 1^2 + 13^2 - 2^2 + 14^2 - 3^2 + 15^2 - 4^2 + 16^2 - 5^2) = 176.$$

Uzmimo još jedan primjer $P = 11 \cdot 17 = 187$ s nizom (**11**,12,13,14,15,16,**17**) za $m=6$. Prema (15) traženi produkt je 187. (Provjerite!).

Dokažimo (15) općenito:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{m+1}[n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + \ldots + (n+m-1)^2 + (n+m)^2 \\ &\qquad - 0^2 - 1^2 - 2^2 - \ldots - (m-1)^2 - m^2] \\ &= \frac{1}{m+1}[(m+1)n^2 + 2n(1+2+3+\ldots+(m-1)+m)] \\ &= n^2 + n\frac{2[1+2+3+\ldots+(m-1)+m]}{m+1} = n^2 + n\frac{2}{m+1}\frac{m(m+1)}{2} = n(n+m). \end{aligned}$$

Provjerite preskočene algebarske operacije i uočite da je suma prirodnih brojeva od 1 do m (uglata zagrada u zadnjem redu) jednaka $\dfrac{m(m+1)}{2}$.

Do sada smo promatrali "unutarnje" kombinacije, što znači da smo uzimali samo one brojeve koji se nalaze između brojeva zadanog produkta. A kako je to s "vanjskim" kombinacijama? Postupak je sličan, samo je potrebno malo pažnje u postavljanju problema. Uvedimo prošireni niz brojeva za dani produkt. Za već promatrani primjer $\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ prošireni niz je $1, 2, 3, \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, 11, 12, 13$. Prva vanjska kombinacija je 3,11, druga 2,12 treća 1,13. Navodimo samo rezultat. Formula (15) sada prelazi u

$$P = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{m+n_0-1}(n_j^2 - j^2). \tag{16}$$

gdje je N ukupni broj brojeva u proširenom nizu (u gornjem primjeru $N=13$), a $n_0 = n$ (u primjeru $n=4$).

Napomena. Do sada nismo koristili negativne cijele brojeve, ali i to se proširenje lako može razumjeti. U posljednjem primjeru prošireni niz brojeva još više se može proširiti i na negativne brojeve pa slijedi: $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, 11,$ $12, 13, 14, 15, 16, \ldots$. Odmah se uviđa da je, na primjer, $\frac{16^2 - 12^2 + 2^2 - 6^2}{2} = 40$. Napišite sami najopćenitiji izraz za produkt sličan onom u (16).

Čitalac se može upitati: zašto jednostavni produkt dva broja tako zakomplicirati, i izvršiti toliko dodatnih računa, koji uključuju i ostale jednostavne matematičke operacije. Sigurno je da s praktičnog stajališta nitko neće tako množiti dva broja. No uvijek je zanimljivo istraživati matematičke strukture, a lako je moguće da se, na primjer, izraz (15) dobije nekim drugim putovima, i bilo bi možda teško uvidjeti da je to ustvari jednostavni produkt.

Na kraju evo još jednog pitanja i zadatka. Možemo li razmišljanja o produktu dva cijela broja proširiti i na dijeljenje dva broja? Podijelimo dva broja k i n, gdje je $k > n$ i $k = n + m$, pa je kvocijent D definiran s

$$D = \frac{k}{n} = \frac{n+m}{n} = \frac{n(n+m)}{n^2} = \frac{P}{n^2}. \tag{17}$$

Jednakost (17) pokazuje da je dijeljenje svedeno na promatranje produkta. Relacija (15) poprima sada oblik

$$D = \frac{1}{n_0^2(m+1)} \sum_{j=0}^{m} (n_j^2 - j^2). \tag{18}$$

Provjerite ovu jednakost za $D = \frac{7}{3}$, čiji je niz brojeva $\{3, 4, 5, 6, 7\}$, i $m = 4$. Kao i prije $n = n_0$. Ako je nazivnik veći od brojnika onda slijedi $D = \frac{n}{k} = \frac{n}{n+m} = \frac{n^2}{n(n+m)} = \frac{n^2}{P}$. Očito će D biti jednak recipročnoj vrijednosti desne strane jednadžbe (18). Može se dakako koristiti i prošireni niz brojeva, a to možete i sami provjeriti. Ako ne uspijete, ili ako želite nešto prodiskutirati, javite se preko e-maila ili običnom poštom ili osobno na Fizički odsjek PMF-a, Bijenička cesta 32, Zagreb. Bit će nam draga suradnja.